Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 2/07/2020

1) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-1}} \,.$$

2) Calcolare, se esistono, le equazioni degli asintoti orizzontali della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1} \,.$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\log(x+2)} \,.$$

4) Calcolare

$$\int_1^e x^2 \, \log(x) \, dx \,.$$

Soluzione

1) Il limite proposto ha a denominatore una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Si moltiplicano numeratore e denominatore per il fattore $\sqrt{4x^2+1} + \sqrt{4x^2-1}$ ottenendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-1})}{4x^2+1-4x^2+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-1})}{2} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

2) Si hanno i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-1/x}}{x(1+1/x)} = 1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\sqrt{1-1/x}}{x(1+1/x)} = -1\,.$$

Quindi la funzione data ha asintoti orizzontali di equazione $y = 1$ e $y = -1$, rispettivamente, per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x + 2 > 0$ e $x + 2 \neq 1$. Si ha quindi

$$D = (-2, -1) \cup (-1, +\infty)\,.$$

4) Risulta

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \log(x)\, dx &= \left[\frac{x^3}{3}\log(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\log(x)\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[2e^3 + 1\right]
\end{aligned}$$